

# Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas

---

MARTÍN M. SOCAS  
*Universidad de La Laguna*

## **Resumen:**

El análisis de los resultados obtenidos en diferentes evaluaciones internacionales, en estos últimos años, nos muestra unos conocimientos y niveles de aprendizaje insuficientes en Matemáticas de los alumnos de Educación Obligatoria. En este artículo, nos preguntamos ¿Qué hacer para mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas?, y abordamos la respuesta a esta pregunta, en relación con el papel que juega el profesorado de Educación Primaria, para mejorar y conseguir un aprendizaje efectivo en Matemáticas. En un momento en el que la formación inicial del profesorado de primaria tiene una gran oportunidad de mejora, al concebirse en el Espacio Europeo de Educación Superior, con una formación de 4 años. Describiremos, tareas que ayudarán a desarrollar competencias profesionales para estos profesores que les permitan propiciar una enseñanza efectiva de las matemáticas.

## **Palabras clave:**

Matemáticas, conocimiento didáctico matemático (cdm), competencia profesional, formación del profesorado, buenas prácticas.

## **Résumé:**

L'analyse des résultats obtenus des différentes évaluations internationales, le long des dernières années, nous montre des connaissances et des niveaux d'apprentissage insuffisants en Mathématiques des élèves de l'Enseignement Obligatoire. Dans notre travail nous nous demandons : Que faut-il faire pour améliorer l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques? et nous abordons la réponse à cette question par rapport au rôle qui joue le professeur dans l'Éducation Primaire pour améliorer et obtenir un apprentissage

## **Abstract:**

The analysis of results obtained from different international assessments, in recent years, reveals certain insufficiencies in the knowledge of and levels of learning in mathematics of pupils in compulsory education. In this article, we examine the question of what to do improve the learning and teaching of mathematics as well as addressing the answer to this question, in terms of the role played by the teaching staff in primary education, to improve and achieve effective learning in mathematics.. As the European Higher Education Area stipulates that the initial training period of primary teachers is to be 4 years, this is a great opportunity to improve the teaching of mathematics. Tasks are described that will help to develop the professional skills needed by the teachers to enable them to promote an effective teaching of mathematics.

## **Key words:**

Mathematics, mathematical didactic knowledge (mdk), professional skills, teacher training, best practices.

effectif en mathématiques, étant donné que la formation initiale du professeur de l'Enseignement Primaire, conçue dans l'Espace Européen de l'Éducation Supérieure (EEES) pendant quatre ans, nous offre une grande possibilité de progrès. Nous décrivons des tâches qui aideront ces professeurs à acquérir des compétences professionnelles qui leur permettront d'aboutir à un enseignement effectif des mathématiques.

**Mots clés:**

Mathématiques, connaissance didactique mathématique (cdm), compétence professionnelle, formation du professeur, bonnes pratiques.

Fecha de recepción: 01-03-2011

Fecha de aceptación: 19-05-2011

## Introducción

Los diferentes informes PISA han puesto de manifiesto los conocimientos y niveles de aprendizaje de los alumnos de Educación Obligatoria en Matemáticas. El análisis de los resultados obtenidos en estas evaluaciones nos muestra unos resultados insuficientes en Matemáticas. Nos preguntamos ¿Qué hacer para mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas? La respuesta a esta pregunta la podemos abordar desde diferentes perspectivas. En este artículo nos vamos a referir a la Educación Primaria como una parte esencial de la Educación Obligatoria, y consideraremos al profesorado de esta etapa como un elemento básico, entre otros, institución, familia..., para mejorar y conseguir un aprendizaje de calidad (cognoscitivo, significativo y efectivo) en Matemáticas.

En este sentido, tanto la formación inicial como permanente del profesorado tiene un especial interés en el momento actual, en el primer caso, porque la demanda actual de un aprendizaje efectivo frente a un aprendizaje estrictamente cognoscitivo requiere de nuevas competencias en el profesorado, y en el segundo, porque las previsiones sobre jubilaciones del profesorado en ejercicio indican que se necesitará incorporar nuevos profesores en los próximos años (Consejo Escolar del Estado, 2007).

Se presenta en la actualidad una gran oportunidad de mejora en la formación inicial del profesorado de Primaria con el Grado de Maestro, en el Espacio Europeo de Educación Superior, con una formación de 4 años, que se obtendrá con 240 créditos. Para la puesta en marcha de este Plan debemos tomar en consideración los diferentes resultados de las investigaciones que proporcionan datos sobre las carencias formativas

de este futuro profesor, para elaborar propuestas de enseñanza y aprendizaje adecuadas a sus necesidades, de tal manera que se acierte sobre los contenidos disciplinares y las competencias profesionales adecuadas al perfil de los nuevos profesores de Primaria.

### **Conocimiento y competencias profesionales de un profesor de Matemáticas**

En este apartado consideramos los conocimientos y las competencias profesionales que deben tener un profesor de Matemáticas en esta etapa educativa.

La preocupación desde la Educación Matemática por establecer estos conocimientos y competencias profesionales ha sido y es una constante de la investigación, especialmente desde los años 80 del pasado siglo, y se sustenta en una conjetura: “el conocimiento y las competencias profesionales del profesor de Matemáticas deben adquirirse a través de diferentes dominios científicos: Matemáticas, Didáctica de las Matemáticas y Ciencias de la Educación. La formación inicial del profesor debe permitir, entonces, ampliar su conocimiento sobre Matemáticas y sobre la Didáctica de la Matemática como un campo específico de competencia profesional (la educación matemática) y como campo de investigación, junto con otros temas que provienen de las ciencias de la educación (desde la psicología de la educación a la sociología de la educación). La investigación en España no ha sido ajena a esta posición, especialmente a partir de los noventa del siglo XX.

Veamos una somera descripción de estos trabajos.

Es en el año 1986, cuando Shulman, señala, por primera vez, la importancia de la materia específica para enseñar en la formación del profesorado. Este autor determinó tres categorías del conocimiento profesional del docente: “Conocimiento de la materia específica”, “Conocimiento del contenido pedagógico [pedagogical content knowledge, pck] o en nuestro contexto: el conocimiento didáctico del contenido (cdc)], y “Conocimiento curricular”. Posteriormente, Bromme (1988, 1994), describe las características cualitativas de las grandes áreas del conocimiento profesional: “Conocimiento de las Matemáticas como disciplina”, “Conocimiento de las Matemáticas como materia escolar”, “Filosofía de las Matemáticas escolares”, “Conocimiento pedagógico” y “Conocimiento

pedagógico específico de las Matemáticas”. Propone el autor que el conocimiento profesional de los profesores no es simplemente un conglomerado de estos dominios de conocimiento, “sino una integración de los mismos”, que se produce durante las prácticas de enseñanza o durante la experiencia docente profesional.

Las investigaciones en España en el campo de la formación y el pensamiento del profesor de Matemáticas (Llinares y Sánchez, 1990a; Llinares, 1991, 1994b; García et al., 1994; Blanco, 1998; Azcárate, 1998,...) ponen de manifiesto, al igual que otras investigaciones más generales (Pajares, 1992; Nickson, 1992), la necesidad de considerar como una fuente importante de carácter cognitivo a los conocimientos y creencias previas del estudiante para profesor de Matemáticas...

Desde la perspectiva del trabajo que debe desarrollar un profesor de Matemáticas, Llinares (1994a) y Llinares et al. (2000), han identificado distintas componentes, de las que derivan dominios del conocimiento base, necesarios para enseñar Matemáticas y que deben ser tenidos en cuenta en los programas de formación: “Conocimiento de matemáticas”, “Conocimiento sobre el aprendizaje de las nociones matemáticas” y “Conocimiento del proceso instructivo”. Posteriormente, Llinares (2004 y 2009) propone la articulación de tres sistemas de actividades o tareas para desarrollar conocimientos y competencias profesionales que debe tener el Profesor de Matemáticas: “Organizar el contenido matemático para enseñarlo”, “Analizar e interpretar las producciones de los alumnos” y “Gestionar el contenido matemático en el aula”.

Niss (2006), describe al profesor de Matemáticas competente como “aquel que de manera efectiva y eficiente es capaz de ayudar a sus escolares a construir y desarrollar competencias matemáticas”. De manera concreta describe los conocimientos y competencias en los siguientes ámbitos: Curricular, Enseñanza, Aprendizaje, Evaluación, Colaborativo y de Desarrollo Profesional.

En el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas, 2001 y 2007), el análisis de los conocimientos y competencias profesionales del profesor de Matemáticas en el ámbito de la Educación Primaria, toma como punto de partida la consideración de las relaciones que se dan entre los tres elementos: contenido matemático curricular, alumnado de Matemáticas y profesorado, que tiene lugar en un contexto caracterizado por los aspectos: Social, Cultural e Institucional, en el que se desarrollan los tres elementos anteriores. Las relaciones entre estos elementos conducen

a tres relaciones básicas: 1) Contenido matemático curricular-profesor, que denomina: “Adaptación del contenido matemático curricular en materia para enseñar”; 2) Contenido matemático curricular- alumno, que denomina: “Aprendizaje de la matemática escolar como cambio conceptual”; 3) Contenido matemático curricular-alumno-profesor, que denomina “Interacciones”, y que tiene lugar en la institución escolar, en la que la educación matemática en esta etapa debe responder a las demandas sociales y culturales concretas, que se contemplan en los fines de las Matemáticas en el Currículo de Primaria.

La educación matemática en Primaria debe responder, en consecuencia, a las expectativas y necesidades tanto individuales, como sociales y culturales. La formación inicial, tiene que tomar en consideración, múltiples aspectos, que van, por ejemplo, en relación con el profesor, desde la toma en consideración de los conocimientos y experiencias previas del estudiante para profesor y su influencia para una formación efectiva, hasta las condiciones de trabajo del profesor y su papel en el sistema educativo y en la sociedad.

Determinados los aspectos más significativos del conocimiento y competencias profesionales del profesor, nos preguntamos ¿Cómo debe ser la oferta de la Universidad a las necesidades individuales, profesionales y sociales que demandan la formación inicial de Profesores de Matemáticas? Desde el Área de Didáctica de la Matemática, en su dimensión docente, tenemos que responder, a múltiples preguntas que nos compete, pero en particular hay dos que emergen como esenciales ¿Cuáles serían las tareas y actividades básicas en un plan de formación inicial de Profesores de Matemáticas de Educación Primaria? Y si, ¿es suficiente la dicotomía Teoría y Práctica, para dar respuestas a las tareas y actividades básicas de la formación profesional del docente?

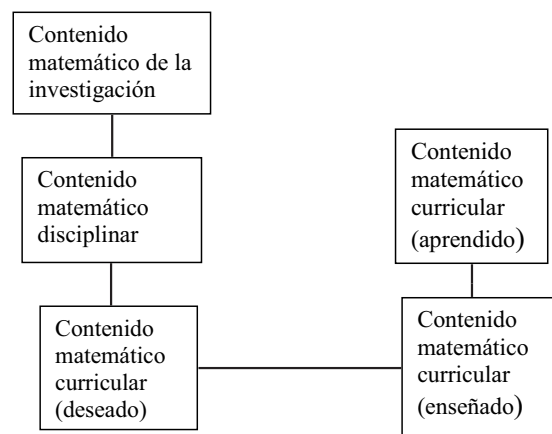
Responder a estas dos preguntas es la intención final de este artículo. En relación con la primera vamos a tomar en consideración los tres sistemas de actividades descritos anteriormente: Organizar el contenido matemático para enseñarlo, Analizar e interpretar las producciones de los alumnos y Gestionar el contenido matemático en el aula (Llinares, 2004 y 2009), actividades que emergen, también como esenciales en las tres relaciones del Enfoque Lógico Semiótico (Socas, 2001y 2007). Sin embargo, nos ocuparemos, especialmente, del primer sistema de actividades, y proponemos, en este sentido, algunas tareas como ejemplo de buenas prácticas profesionales que el profesor debe desarrollar (proble-

ma profesional), para ser efectivo, es decir, competente, en la enseñanza de las Matemáticas.

Reflexionaremos, también, en relación con la segunda pregunta, sobre la necesidad de avanzar en la dicotomía teoría y práctica como conocimientos que desarrollan las competencias profesionales para diseñar y gestionar la práctica docente en Matemáticas.

### Organizar el contenido matemático para enseñarlo

Supone para los alumnos afrontar un problema profesional que requiere del análisis, la comprensión y la planificación. Pero el contenido matemático, es un espacio de conocimiento o entorno, que tiene desde la perspectiva del profesor de matemáticas tres ámbitos específicos, que necesita analizar, comprender y planificar. Podemos representar los diferentes ámbitos de contenido matemático mediante el siguiente esquema:



En esta representación, identificamos como el primer ámbito que el profesor necesita organizar, al que deriva de la propia disciplina, el saber matemático erudito, que podemos denominar contenido matemático disciplinar (cmd) o formal (Socas, 2010); otro ámbito es el contenido matemático curricular (cmc), contenido matemático deseado que es definible en el dominio del contenido matemático disciplinar, aunque no es organizado bajo esa lógica. Mediante mecanismos y organizaciones precisas se extraen del contenido disciplinar y se sitúan en el currículo.

Realizadas estas acciones por diferentes elementos del sistema educativo, el contenido matemático curricular es intrínsecamente diferente del saber disciplinar, al menos en su aspecto epistemológico, y admite interpretaciones desde diferentes perspectivas, por ejemplo funcional, como parte de una cultura básica común (Rico y Lupiáñez, 2008), y el tercer ámbito, es el contenido matemático para la enseñanza (cme), que comprende tanto el contenido matemático enseñado como el evaluado (Hernández y otros, 2010a). Los tres contenidos se relacionan entre sí en un procedimiento que se denomina transposición o adaptación de los contenidos matemáticos, pero tienen una organización propia y diferenciada. La organización del contenido matemático disciplinar sigue el orden lógico de la disciplina, y está asociado a la competencia matemática disciplinar o formal de los sujetos que lo organizan. La organización del contenido matemático curricular surge de un orden pedagógico implícito en los diseñadores del currículo, y está asociado a la competencia matemática básica como parte de una cultura común. La organización del contenido matemático para la enseñanza se elabora a partir del orden didáctico y está asociado a la competencia de los sujetos en el conocimiento didáctico matemático (cdm) y determina la secuencia y el nivel del contenido matemático en la propuesta de enseñanza, en relación con la competencia matemática básica y las otras competencias básicas.

La tarea profesional de organizar el contenido matemático para la enseñanza supone ser competentes en los tres ámbitos del contenido matemático. Nos preguntamos ¿Qué sucede con nuestros alumnos y cómo implicarlos en tareas profesionales que les haga competentes para analizar, comprender y planificar estos tres ámbitos del contenido matemático?

## **Conocimientos y competencias matemáticas del alumnado**

Analizamos, ahora, los conocimientos matemáticos de los alumnos que ingresan en la universidad con la intención de hacerse profesores de Matemáticas de Primaria. Este ha sido un trabajo prioritario en la Universidad de La Laguna, en los últimos 10 años. En estos estudios se consideran tanto los conocimientos básicos de los alumnos que comienzan los estudios de Magisterio como su actitud hacia la Matemática, además de su situación personal y académica. Se trata de estudios que tienen como



objetivo obtener información que permita elaborar programas básicos de Matemáticas para los Títulos de Maestro, que partan del conocimiento real de los alumnos y permitan desarrollar actitudes positivas hacia la Matemática en un marco de formación de profesores. Por ejemplo, algunas de estas pruebas iniciales, se pasaron a 883 alumnos de varias universidades (Extremadura, Granada, Huelva, La Laguna, Las Palmas de Gran Canaria, Murcia y Zaragoza), que cursan por primera vez la asignatura de Matemáticas en las distintas especialidades de los Títulos de Maestro (Palarea, M.; Hernández, J.; y Socas, M., 2001; Hernández, J.; Noda, A.; Palarea, M. y Socas, M., 2002 y 2003).

La Prueba se diseña teniendo en cuenta cinco áreas, que se corresponden con los siguientes bloques de contenidos: Números y Operaciones (Competencia en la utilización de números y operaciones Manejo de la proporcionalidad); Medida (Competencia en la utilización de procedimientos y sistemas de medida convencionales. Estimación y cálculo de longitudes, superficies y volúmenes); Geometría (Competencia espacial. Reconocimiento de los movimientos en el plano); Análisis de datos, estadística y probabilidad (Competencia para interpretar y representar conjuntos de datos e informaciones estadísticas. Competencia para predecir resultados probabilísticos. Reconocimiento de códigos) y Álgebra (Competencia para comprender y utilizar el lenguaje algebraico). Las cuestiones están diseñadas no sólo para que se puedan analizar conocimientos y destrezas sino para detectar habilidades para aplicar procedimientos y resolver problemas.

Los resultados obtenidos se organizan en torno a las siguientes variables: actitud hacia las Matemáticas, estudios precedentes, modalidad de estudios y universidad de procedencia, además se analizan los errores más significativos cometidos por el alumnado.

Estos resultados muestran enormes deficiencias de los alumnos que inician los estudios de Magisterio en conocimientos básicos de Matemáticas, pero sobre todo llama especialmente la atención el escaso éxito en aquellas cuestiones en las que los alumnos no necesitan realizar cálculos, sino realizar estimaciones o aplicar el sentido común, por ejemplo, en problemas en los que sobra o falta algún dato, pero no se encuentran diferencias significativas respecto a estos conocimientos básicos y a los errores que cometen, según procedencia o modalidad.

De estos alumnos, un 46% expresa tener una actitud buena hacia las Matemáticas, mientras un 6% muestra una actitud muy buena, un 6%



negativa y un 42% baja. Podemos considerar que se trata de una muestra bastante heterogénea.

Las investigaciones posteriores no mejoran los datos obtenidos con anterioridad, encontrándose en estos trabajos que los alumnos tienen un predominio del pensamiento operacional frente al estructural y procesual, y que es este pensamiento el que subyace, mayoritariamente, en la resolución de cualquier tarea matemática, muchas veces, sin éxito, incluso cuando el conocimiento operacional aplicado es correcto. Estos resultados ponen de manifiesto que el énfasis que la enseñanza de las Matemáticas pone en el pensamiento operacional, puede estar creando dificultades y obstáculos al alumno en la aplicación, por ejemplo, de heurísticos y estrategias en la resolución de situaciones problemáticas que están más asociadas a un pensamiento estructural e incluso procesual, y que crea dificultades en la consecución de las competencias matemáticas (Socas y otros, 2009).

Estos resultados nos indican con claridad que los conocimientos y competencias para la organización de los contenidos matemáticos, desde la perspectiva disciplinar, necesitan en los estudiantes para profesores una revisión de la disciplina en términos de unas “Matemáticas” para formar profesionalmente a los Maestros, que mejoren, no solo sus conocimientos matemáticos sino sus creencias sobre la finalidad de estos conocimientos en la Educación Primaria, pero ¿cómo debemos entender estas Matemáticas para Maestros?

## **Matemáticas para Maestros**

En las asignaturas de Matemáticas en los programas de formación de profesores de Primaria se ha diseñado, en general, el contenido matemático como un conocimiento disciplinar, que se desarrolla explicitando los diferentes campos conceptuales, y considerando a las Matemáticas como un elemento fundamentalmente instructivo que está organizado desde el punto de vista de su lógica interna, lo que supone caracterizar al conocimiento matemático mediante una organización basada en sus conceptos claves y en una presentación mediante una secuenciación lógica, es decir, se organiza la materia como la organizaría un especialista en Matemáticas. Constituye esta organización de los programas de Matemáticas una “endoestructura”, esto es los contenidos matemáticos

se desarrollan, organizados en campos conceptuales, partiendo de su estructura interna, de sus conceptos claves y de su organización lógica.

Se observa en los alumnos que estudian para maestros que este conocimiento, después de cursar la asignatura de Matemáticas, en muchos casos han aumentado, pero sigue teniendo el mismo sentido que el conocimiento adquirido en el contexto escolar anterior, es decir, les permite resolver ejercicios y problemas en los exámenes, y en algunos casos ha podido despertar un interés intelectual e incluso proporcionar un cierto placer. Pero con este planteamiento el futuro profesor de Matemáticas ha tenido pocas ocasiones de ver estos conocimientos en acción o hacer una reflexión general sobre los mismos.

Por otra parte, los contenidos de Matemáticas del currículo que el profesor debe implementar han sido determinados por diversos agentes del macrosistema educativo mediante un proceso que generalmente resulta desconocido al futuro profesor. El currículo está organizado por una lista de contenidos que están relacionados con las capacidades y competencias que pueden desarrollar e inmerso en una concepción determinada de entender la enseñanza y el aprendizaje, así como el proceso de evaluación.

Podemos señalar como un hecho cierto que muy poco profesores de Matemáticas de la educación obligatoria saben realmente lo que están enseñando en términos de un conocimiento matemático como proceso, es decir, como un conocimiento que debe ser considerado desde una perspectiva histórica/crítica, contextualizado y que tiene relaciones con las sociedades y culturas donde nace y se arraiga. La perspectiva de considerar el conocimiento matemático como un producto acabado, lo que supone abordar el conocimiento en su fase actual, descontextualizado, basado en el análisis lógico de la disciplina y en la que las relaciones se establecen solo a nivel de conceptos matemáticos, es insuficiente para cubrir con garantías una parte importante de los fundamentos de la propuesta curricular de Matemáticas en la Educación Primaria.

Los programas de Matemáticas para maestros deben tratar los objetos matemáticos de la Educación Primaria, profundizando desde tres perspectivas diferentes y complementarias, a saber: estudiar y reflexionar sobre la naturaleza de los procesos y relaciones implicados en la formación de los objetos matemáticos de la Educación Primaria, conocer hechos históricos relevantes relacionados con estos objetos matemáticos, y practicar activamente y dominar las Matemáticas de la Educación

Primaria en su consideración actual, tanto en sus aspectos puntuales y descontextualizados como en sus aspectos contextualizados y aplicados.

El desarrollo del programa de Matemáticas para la formación de profesores debe permitir profundizar, tanto en la naturaleza de los objetos como en la práctica con los mismos, es decir, los alumnos deben tener acceso a la genuina experiencia matemática, además de desarrollar las competencias matemáticas básicas para zonas o estratos amplias de población, en relación con la naturaleza de los conocimientos matemáticos que se propone que adquieran.

El dominio usual de aplicación de los objetos matemáticos de la Educación Primaria requiere diferentes tipos de situaciones, representaciones semióticas y problemas relacionados con la actividades cotidianas, con experiencias físicas, numéricas, geométricas y de medida, que por su variedad y amplitud requieren de un análisis mas profundo que ponga de manifiesto las características de los fenómenos que dan significado a los objetos e ideas matemáticas implicadas y que dan sentido y, a la vez, organizan el conocimiento matemático correspondiente. Este análisis fenomenológico debe ser sistemático y aportar una estructura organizada del conjunto de fenómenos y objetos matemático implicados en las Matemáticas de la Educación Primaria.

En esta propuesta de Matemáticas para maestros, debemos considerar la organización curricular de los contenidos matemáticos de una etapa educativa obligatoria como una "exoestructura", que atiende a aspectos tales como naturaleza y usos preferentes, implementación y manejo de, funciones que pueden desempeñar en un momento dado del desarrollo del alumno o ante una determinada situación escolar y que queda reflejado, de manera general, en la finalidad de las Matemáticas en la Educación Obligatoria, que responde, en el marco de una cultura Matemática para todos, a tres fines: formativo, instrumental y funcional. El fin formativo está asociado con el desarrollo de capacidades de razonamiento lógico/matemático, de abstracción y modelización, es decir, hace referencia al sistema conceptual de la matemática. El fin instrumental está asociado al desarrollo de recursos matemáticos que permitan posteriores estudios tanto en Matemáticas como en otras Áreas, es decir, hace referencia a los aspectos fenomenológicos. El fin funcional, está asociado al desarrollo de habilidades que posibilite la actuación en la sociedad, facilitando la identificación, la comprensión y resolución de problemas de la vida cotidiana.

Debemos, en consecuencia, mirar la organización curricular del contenido matemático objeto de enseñanza en una etapa educativa como una organización sistemática, que considera al contenido matemático como un elemento fundamentalmente cultural y básico, que está organizado desde una perspectiva epistemológica y fenomenológica, que permita desarrollar las competencias matemáticas básicas, y que se presenta con una organización pedagógica y orientaciones metodológicas así como criterios para la evaluación de los conocimientos y capacidades adquiridas.

Podemos representar mediante el siguiente cuadro los diferentes ámbitos del contenido matemático y su relación con la organización, las competencias disciplinares y profesionales.

Contenidos	Matemático Disciplinar (cmd)	Matemático Curricular (cmc)	Matemático de Enseñanza (cme)
Organización	Lógica	Pedagógica	Didáctica
Competencias	Matemática Formal	Matemática Básica	Básicas

La asignatura: Matemáticas para Maestros, trataría del contenido matemático disciplinar y del contenido matemático curricular referido a la competencia matemática básica.

## **Analizar e interpretar las producciones de los alumnos**

Constituye el segundo grupo de actividades y tareas que debe desarrollar el estudiante para profesor de matemáticas y supone al profesorado, el conocimiento y la capacidad de movilizar diferentes recursos: representaciones matemáticas analógicas y digitales, dificultades, obstáculos y errores asociadas al contenido matemático objeto de enseñanza...

Veamos, por ejemplo, el papel de las dificultades, obstáculos y errores de los alumnos en este análisis e interpretación. Sabemos que el aprendizaje de las Matemáticas genera muchas dificultades a los alumnos y éstas son de naturaleza distinta. Algunas tienen su origen en el Macrosistema educativo, pero en general, su procedencia se concreta en el Microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas

que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores.

El error va a tener procedencias diferentes, pero, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y, no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste.

Las dificultades pueden ser agrupadas en cinco grandes categorías asociadas a 1. La complejidad de los objetos de las Matemáticas; 2. Los procesos de pensamiento matemático; 3. Los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas; 4. Los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y 5. Las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas (Socas, 1997).

### **Didáctica de las Matemáticas**

Además del conocimiento matemático disciplinar y curricular, el profesor de Matemáticas necesita del conocimiento didáctico matemático (cdm), para poder organizar los contenidos matemáticos para la enseñanza. Se trata de un conocimiento profesional específico que se tiene que aportar desde las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas, y que incluye los elementos de análisis adecuados para entender, planificar y realizar el trabajo profesional. El profesor necesita ampliar y conectar diferentes perspectivas sobre los contenidos del currículo de Matemáticas, de manera que su consideración no sea solamente desde la lógica interna de la disciplina, que puede emerger como excesivamente restrictiva, formal y técnica, sino desde la dimensión curricular, perspectiva más abierta e integradora del saber matemático a enseñar, pero esto no es posible llevar a la práctica solamente desde la consideración teórica del conocimiento matemático disciplinar y curricular, para convertirlo en conocimiento matemático para enseñar.

El profesorado, a efectos de poder diseñar, elaborar, desarrollar y evaluar las diferentes programaciones curriculares necesita del conocimiento didáctico matemático (cdm) que le aporta información a efectos de contextualizar el currículo de Matemáticas (analizar, situar y secuenciar cada uno de los bloques de contenido del currículo y conocer la estructura de los contenidos de cada uno de ellos en forma de capacidades cognitivas que éstos pueden desarrollar); las representaciones y mode-

lización de los diferentes objetos matemáticos del currículo (conocer y utilizar los diferentes sistemas de representación semióticos del conocimiento matemático y sus usos en diferentes procesos de modelización, y conocer y utilizar diferentes materiales y recursos, en los que se incluye las referencias bibliográficas); los aspectos cognitivos implicados en el aprendizaje (conocer y analizar dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas); los aspectos de enseñanza (analizar y diseñar modos y situaciones (actividades) de enseñanza de los contenidos matemáticos y prever sus consecuencias); y la evaluación del aprendizaje (analizar y diseñar situaciones (actividades) para conocer y valorar el dominio de los aprendizajes realizados).

De manera resumida, y en el marco de ELOS (Socas, 2007) estamos llamando “conocimiento didáctico matemático” (cdm) al que deriva del conocimiento matemático disciplinar y curricular y de las relaciones básicas en el microsistema educativo 1): “Aprendizaje de la matemática escolar como cambio conceptual” y 2): “Adaptación del contenido matemático curricular en materia para enseñar”.

El conocimiento didáctico matemático deriva, entonces, de un modelo de competencia que tiene una estructura global holística, es decir, los fenómenos didácticos se explican desde esa totalidad y no desde una de sus partes. La construcción de un modelo de competencia de esta naturaleza desde abajo a arriba, es decir, caracterizando primero el contexto, luego la díada contexto-referente, y más tarde la tríada contexto-referente-significado, implica, en la asignatura Didáctica de las Matemáticas, entendida como el conocimiento didáctico matemático, aspectos específicos del referente y del significado, y supone, en consecuencia, la presencia de conocimientos de niveles anteriores. En concreto, aparecen como conocimientos previos del conocimiento didáctico matemático (cdm): conocimiento matemático disciplinar y conocimiento matemático curricular.

## **Gestionar el contenido matemático en el aula**

Constituye el tercer grupo de actividades y tareas que debe desarrollar el estudiante para profesor de matemáticas y supone al profesorado, el conocimiento y la capacidad de movilizar diferentes recursos como: conocer situaciones problemáticas susceptibles de ser adaptadas a los niveles

y a las posibilidades de los alumnos, conocer técnicas de observación y evaluación de la heterogeneidad del aula...

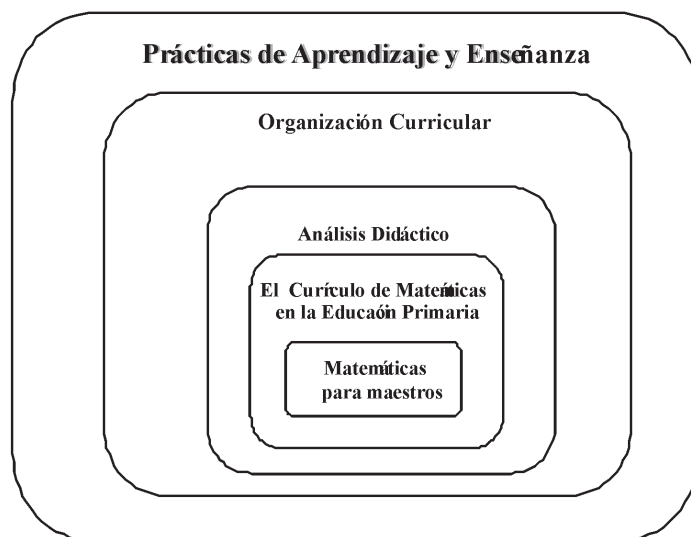
### **Prácticas de enseñanza**

Los conocimientos y capacidades se desarrollan en contextos reales mediante las prácticas escolares externas y debe ser una materia curricular organizada con una estructura curricular abierta, que se plantea a partir de una situación real concreta y da sentido al análisis y planificación en contextos reales y, es el cierre global a todo el proceso, es decir, es el lugar en el que la reflexión profesional es completa, en el que se ponen de manifiesto los conocimientos y competencias profesionales del futuro profesor: conocimiento matemático y gestión del mismo, conocimiento matemático didáctico y gestión del mismo y competencia personal, social y relacional.

### **Propuesta básica de formación del Profesorado de Educación Primaria en Matemáticas**

Se formula una propuesta global para la formación profesional en Matemáticas del profesorado de Educación Primaria, en la los tres grupos de actividades descritos, se articulan desde una perspectiva profesional, y se pretende facilitar un acercamiento desde el conocimiento matemático disciplinar (cmd) al conocimiento matemático curricular (cmc), al conocimiento didáctico matemático (cmd) y al conocimiento de la práctica educativa (cpe), mediante una propuesta que va desde la globalidad general del currículo y del conocimiento matemático disciplinar implicado, a la totalidad organizada de un contenido curricular como contenido para enseñar. La situación se representa en el siguiente gráfico, que expresa el carácter cíclico de la propuesta.





En consecuencia formulamos la propuesta básica para la formación del Profesorado de Educación Primaria (EP) en Matemáticas que organizamos en tres materias:

- “Matemáticas para maestros”
- “Didáctica de las Matemáticas (EP)”
- “Prácticas de Enseñanza de Matemáticas (EP)”

En concreto, la materia Didáctica de las Matemáticas, se refiere al conocimiento matemático curricular y a las relaciones básicas 1) y 2) en el microsistema educativo. La relación 3) que hemos caracterizado como interacción, respondería a la asignatura de Prácticas de enseñanza, que asume un protagonismo especial en la construcción del conocimiento profesional; pensamos que esta relación 3), que sitúa al profesor en el sistema didáctico fundamental, conecta la teoría y la práctica, y facilita el encuentro entre los distintos aspectos de la formación y del pensamiento profesional del profesor y, es en la relación 3), en el que este proceso de abajo a arriba, diseñado para la formación del profesorado de Matemática de Primaria completa y da sentido a la triada didáctica y es probablemente el espacio en el que se puede encontrar respuestas a los interrogantes que plantean algunos de los autores acerca del conocimiento profesional y de la construcción de ese conocimiento.

La didáctica de un objeto o foco matemático se entiende estructura-

da por los dos constructos siguientes: análisis didáctico y organización curricular.

El análisis didáctico debe ser entendido como el análisis de los contenidos curriculares de las Matemáticas del sistema educativo, que se realiza al servicio de organizar su enseñanza en una etapa educativa (Freudhental, 1983). En nuestro caso, el análisis didáctico queda organizado mediante la siguiente triada: currículo, representaciones semióticas y dificultades, obstáculos y errores, y facilita una base curricular general del contenido matemático, que permite organizar, diseñar y gestionar actividades en las que los alumnos desarrollan las competencias matemáticas. Se trata, en un primer momento, de hacer una propuesta del currículo de Matemáticas que permita una planificación real y eficaz, que respete la diversidad del alumnado en una clase inclusiva de Matemáticas.

El análisis didáctico implica, en la componente currículo, una revisión de los contenidos curriculares desde la perspectiva formal: operacional, estructural y procesual; es decir, se describe el campo conceptual de los objetos implicados, así como las funciones y fenómenos que queremos que organice en este nivel educativo, pero también implica una necesaria relación con el alumnado vinculado a los intereses y motivaciones.

La componente representaciones semióticas implica una revisión de los contenidos curriculares en relación con las diferentes formas de representación de los objetos tratados, así como la presentación de la información al alumnado; en este apartado, tomamos en consideración los diferentes estadios de desarrollo del objeto: semiótico, estructural y autónomo, que también implican una necesaria relación con el alumnado vinculado a la coordinación entre las formas de expresión y representación y a los intereses y motivación de los alumnos.

La componente dificultades, obstáculos y errores, supone una revisión de los contenidos curriculares en relación con estos tres aspectos, con una doble finalidad de prevención y remedial, lo que permitirá, por ejemplo, desde la perspectiva de prevención establecer los niveles o competencias cognitivas requeridas de los alumnos, en relación con el objeto o foco matemático tratado. La determinación de los errores que generan los alumnos necesita de elementos de análisis que permitan profundizar en la complejidad de las dificultades del aprendizaje de las Matemáticas. Una manera de abordarlos sería, como señala Socas (1997), tomar en consideración las tres direcciones de análisis, a modo de tres ejes de coordenadas que nos situaría con más precisión en los

orígenes del error y nos permitiría como profesores, arbitrar procedimientos y remedios más efectivos. Estos tres ejes estarían determinados por su origen: I) En un obstáculo; II) En ausencia de sentido; III) En actitudes afectivas y emocionales.

La organización curricular debe ser entendida como aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de Matemáticas, denominados organizadores del currículo (Rico, 1997). En nuestro caso, la organización curricular queda determinada mediante la siguiente triada: contexto, enseñanza-aprendizaje y evaluación.

En resumen, se trata de una propuesta de formación básica en la que proponemos, en primer lugar, Matemáticas para maestros como asignatura de estructura curricular cerrada, que se aborda desde la competencia matemática formal y básica, esto es análisis y comprensión del contenido matemático curricular en términos disciplinares, es decir, con referencias epistemológicas, fenomenológicas y de aplicabilidad, en la que los alumnos completan su propia formación básica relacionada con dichas cuestiones a nivel de los sistemas conceptuales implicados: operaciones, estructuras y procesos, en situaciones de resolución de problemas, desarrollando los razonamientos y los lenguajes apropiados al nivel temático considerado, es decir, desarrollan y consolidan la actividad matemática "a su nivel", en el campo de problemas matemáticos propios del nivel de actuación posterior, Primaria, en tareas y actividades de naturaleza diferentes pero necesarias para enlazar con las tareas y actividades escolares. En segundo lugar, Didáctica de las Matemáticas (EP) como una asignatura de estructura curricular básica, que facilita el conocimiento didáctico matemático (cdm). Su punto de partida es el análisis específico del currículo de Matemáticas de Primaria en su interacción con los conocimientos y creencias previos, mediante el constructo "Didáctica de un foco o un contenido matemático curricular", que se plantea a partir de una situación problemática supuesta de naturaleza profesional y que se aborda mediante el análisis didáctico (análisis) y la organización curricular (planificación). Esta competencia de naturaleza didáctica, es facilitada, sin lugar a dudas, por las experiencias, que normalmente no han tenido en su período de formación anterior, en la asignatura de Matemática para maestros, en la que probablemente habrán cubierto lagunas producidas a lo largo de sus experiencias como alumnos de Matemáticas, y que hoy son objeto de controversia. La materia Prácticas de

enseñanza, está organizada con una estructura curricular abierta, que se plantea a partir de una situación real concreta y da sentido al análisis y planificación en contextos reales y, es el cierre global a todo el proceso, es decir, es el lugar en el que la reflexión profesional es completa, en relación con las competencias profesionales del profesorado: conocimiento matemático y gestión del mismo, conocimiento matemático didáctico y gestión del mismo y competencia personal, social y relacional.

Esta propuesta básica se organiza con la intención de cubrir la formación didáctica y la cualificación profesional en la formación inicial del profesorado de Educación Primaria en Matemáticas.

## Buenas prácticas

La formación del profesorado de Primaria debe centrarse en la organización y desarrollo de buenas prácticas que permitan la consecución de las competencias profesionales requeridas; éstas se tienen que desarrollar en el marco de la resolución de problemas de carácter profesional relacionados con los conocimientos y recursos que el profesor debe movilizar para obtener la solución del problema.

Queremos señalar que los conocimientos matemáticos y didácticos y competencias profesionales básicas que se desarrollan en la propuesta de formación considera como eje organizador los tres sistemas de actividades profesionales anteriormente descritos: *Organizar el contenido matemático para enseñarlo*, *Analizar e interpretar las producciones matemáticas de los alumnos* y *Saber gestionar el contenido matemático en el aula*, y que éstas no son independientes sino que mantienen una necesaria relación que les da una perspectiva global a las diferentes tareas.

Si tomamos como ejemplo la organización del contenido matemático para enseñarlo, no encontramos que el punto de partida es la organización del contenido matemático desde el punto de vista disciplinar. En este sentido, consideramos la propuesta que se hace desde el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas, 2001 y 2007), en el que la organización disciplinar deriva de la competencia matemática formal (cmf) que organiza los diferentes recursos que aporta la Matemática y su relación con la competencia matemática. Parte del hecho que la Matemática constituye una disciplina multiforme, en la que destacan tres aspectos como esenciales: La Matemática es un LENGUAJE simbólico característico y constituye un

sistema de signos propios; La Matemática es un SISTEMA CONCEPTUAL lógicamente organizado y socialmente compartido; La Matemática es una actividad de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS socialmente compartida.

El modelo que aporta ELOS sitúa en el contexto del Microsistema educativo a la Situación Problemática (Plantear y resolver problemas), el Lenguaje (Comunicar) y los Razonamientos (Pensar y Argumentar), como elementos socioculturales comunes para cualquier disciplina curricular y organiza las restantes competencias asociadas a la especificidad de la propia disciplina Matemática, que se puede caracterizar mediante los referentes: operaciones, estructuras y procesos, a efectos de caracterizar los dominios de la actividad matemática.

Esta forma de organizar la competencia matemática formal (cmf) permite describir el campo conceptual del objeto, sus funciones y su fenomenología, en el nivel temático en que estemos tratando el objeto matemático (Socas y otros, 2009).

La cmf es un instrumento útil que permite relacionar y describir, tomando en consideración el contexto y la competencia matemática, los significados de los objetos matemáticos y sus relaciones, tanto a nivel individual como institucional, los errores, las dificultades y los obstáculos.

El uso de la cmf nos permite, por ejemplo, establecer relaciones entre los dominios de la actividad matemática desde la competencia formal, los estadios de desarrollo y los niveles de complejidad en las tareas matemáticas.

Estadios(*) y Niveles (**) Dominios de actividad matemática desde la competencia formal	Ámbitos	Semiótico Reproducción	Estructural Conexión	Autónomo Reflexión
Sistemas de Representación (SR)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Reconoce</li> <li>- Transforma (Conversión)</li> <li>- Elabora (Produce)</li> </ul>			
Situación Problema	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Identifica</li> <li>- Plantea</li> <li>- Resuelve</li> </ul>			

Razonamientos	- Describe - Justifica (argumenta) - Razona			
Operaciones	- Operaciones - Algoritmos (Reglas) - Técnicas			
Estructuras	- Conceptos (Definiciones) - Propiedades - Estructuras			
Procesos	- Sustitución Formal - Generalización - Modelización			

Los estadios (\*) de desarrollo considerados: semiótico, estructural y autónomo, están tomados de ELOS (Socas, 1997). La construcción de estos niveles de dificultad se realiza partiendo de los diferentes estadios de desarrollo de los signos matemáticos, para, más tarde, establecer relación con los estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos. Los niveles (\*\*) de complejidad en las tareas matemáticas: Reproducción, Conexión y Reflexión, y de las competencias demandadas por las mismas están tomados del Proyecto PISA (Rico y Lupiáñez, 2008).

Si planteamos la tarea de diseñar una programación de aula para Matemáticas el conocimiento técnico anterior nos será de gran utilidad en determinados aspectos de la tarea. Describamos esta tarea desde una perspectiva profesional para alumnos en formación para maestros de Primaria.

Nos situamos, ahora, en el conocimiento didáctico matemático y planteamos la tarea de diseñar una Programación de aula para Matemáticas. A los alumnos se les pide, por ejemplo, en un primer momento y como situación problemática de partida, que elijan un contenido del currículo de Matemáticas de la Educación Primaria y que organicen brevemente, no más de una hoja, cómo sería su planificación para presentarla y defenderla en una entrevista, por ejemplo, ante el equipo directivo de

un centro privado de Primaria, que quiere contratar profesorado de Matemáticas para esta etapa educativa.

Una vez analizadas y discutidas las diferentes propuestas a nivel del grupo de clase, se propone la tarea para desarrollarla durante todo el semestre. La tarea se desarrollará en tres fases:

- Fase inicial en la que el alumno plantea la situación problemática mediante un supuesto para uno de los tres Ciclos de Primaria.
- Fase de desarrollo, en la que los alumnos elaboran el plan de trabajo, mediante discusiones (clase, tutorías...), búsquedas (curriculares, bibliográficas, Internet...), explicación del Profesor...
- Fase de finalización de la tarea (Producto): Informe, Mapa de los conocimientos...

En esta situación y en el contexto de la asignatura de Didáctica de las Matemáticas en la Educación Primaria, los alumnos van a tratar los diferentes aspectos del conocimiento didáctico como conocimiento profesional, es decir, en sus tres vertientes: teórico, técnico y práctico.

De esta manera, se va concretando más la situación problemática anterior, y se les pide a los estudiantes para profesor que expliciten, para el tema elegido, "Los objetivos específicos (didácticos) en términos de competencias."

Es obvio que la formulación de estos objetivos específicos, por parte de los estudiantes para profesor, supone necesariamente tomar posiciones implícitas o explícitas en relación con las Matemáticas, el aprendizaje o la enseñanza de la misma.

La tarea es concebida como un problema de carácter profesional y de naturaleza didáctico matemático, es decir, como una demanda en la actuación del profesor, y las actividades como las diferentes actuaciones que el estudiante para profesor o el formador de profesores, realizan para la consecución de la tarea.

## Consideraciones finales

Hemos sugerido una propuesta de formación de los estudiantes para profesor de Primaria que pueda mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas en esta etapa educativa, ya que como señala Sowder (2007), muchas de las dificultades que tienen los alumnos en Matemáti-



cas tiene que ver con la enseñanza que reciben, pero ¿qué supone preparar competentemente a un estudiante para profesor de matemáticas? En nuestra propuesta, hemos optado por desarrollar tres sistemas de actividades básicas que determinan los conocimientos y competencias del profesor, planteadas como tareas profesionales desde la perspectiva global en el marco de la resolución de problemas propios de su profesión.

Los tres sistemas de actividades profesionales descritos, sitúan al profesorado en diferentes competencias profesionales, por ejemplo, en el caso de la actividad: *Organizar el contenido matemático para enseñarlo*, sitúa a los alumnos en las competencias: Conocer los contenidos de las Matemáticas que debe enseñar y ser capaz de traducirlos en expectativas de aprendizaje, y diseñar y planificar secuencias de aprendizaje. En el caso de la actividad: *Analizar e interpretar las producciones matemáticas de los alumnos*, sitúa a los alumnos en las competencias: Conocer y trabajar a partir de las representaciones de los alumnos incluidas las idiosincrásicas, y, Conocer y trabajar a partir de las dificultades, obstáculos y errores de los alumnos.

En el caso de la actividad: *Saber gestionar el contenido matemático en el aula*, sitúa a los alumnos en las competencias: Diseñar y controlar situaciones problemáticas apropiadas para los diferentes niveles y posibilidades de los alumnos, y, observar y evaluar a los alumnos en situaciones de aprendizaje.

Nos encontramos, en un momento en el que se observan cambios de perspectiva sobre el conocimiento didáctico en la formación profesional, en la que se abandona el conocimiento didáctico basado en la teoría del desarrollo de la competencia para la práctica y la organización docente, para centrarse en el trabajo sobre situaciones de trabajo significativas y efectivas y en el conocimiento de los procesos de trabajo característicos de estas situaciones, como eje central para la organización de los procesos de formación del estudiante para profesor, desde esta perspectiva profesional. El caso de la formación de estudiante para profesor de Matemáticas, nos ha llevado a considerar las situaciones básicas de trabajo significativas y efectivas y cómo éstas deben ser tratadas con un enfoque globalizador y profesional. El enfoque globalizador se sitúa en el contexto de los estudiantes para profesores, y se articulan y relacionan diferentes materias en una propuesta global, que pretende garantizar una visión completa e integradora de la Matemática y del aprendizaje y enseñanza de la misma, favoreciendo la participación activa de los estudiantes para

profesores, que muestra cómo nos acercamos mediante la cultura matemática al conocimiento de la realidad y como ésta es percibida por los estudiantes.

Los programas de Matemáticas utilizados con estudiantes para maestros desde el enfoque disciplinar como un producto acabado, es como muestra las investigaciones realizadas, insuficiente. Proporcionar a los estudiantes para maestros, el análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático objeto de enseñanza de una etapa educativa, supone conocer además de los sistemas conceptuales implicados, sus lenguajes y problemas, la utilidad de los objetos matemáticos y su uso, lo que permitiría abordar con éxito la interpretación de los fines del currículo de matemáticas de esa etapa educativa y afrontar con garantías el conocimiento matemático didáctico. La organización del conocimiento matemático mediante el binomio fenomenología/epistemología, supone prestar atención preferente al uso, manejo y función que puede desempeñar ese conocimiento en un momento dado, sin perder de vista su lógica interna.

Como señala Krainer y Llinares (2010), la formación del profesor de Matemáticas tiene como finalidad mejorar las creencias del profesor, el conocimiento y la práctica y contribuir al crecimiento cognitivo y afectivo de los estudiantes. Es un cambio para buscar y encontrar respuestas a las preguntas de dónde, bajo qué condiciones, cómo y por qué es importante el carácter específico del dominio de las Matemáticas.

## Referencias bibliográficas

- Azcárate, P. (1998). La formación inicial de matemáticas: análisis desde la perspectiva del conocimiento práctico profesional. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 32, 129-142.
- Blanco, L. (1998). Nuevo marco curricular en la formación de los profesores de Primaria. *Simposio Formación inicial de profesores de Primaria y Secundaria en el Área de Matemáticas* (pp. 83-96). León.
- Bromme, R. (1988). Conocimientos profesionales de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, 6 (1), 19-29.
- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: a psychological topology of teacher' professional knowledge. En R. Biehler et al. (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer.
- Consejo Escolar del Estado (2007). Conclusiones del Seminario: *La formación inicial y permanente de maestros y profesores*. 31 de Mayo y 2 de Junio de 2007. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- García, M. et al. (1994). Aprender a enseñar matemáticas. Una experiencia en la formación matemática de los profesores de Primaria. *Epsilon*, 30, 11-26.
- Hernández, J.; Muñoz, M. Palarea, M.M.; Ruano, R. y Socas, M.M. (2010a). La programación por competencias en la clase de Matemáticas. Una actividad profesional básica. En M.T. González, M.M. Palarea y A. Maz, (Eds.), *Seminario de los grupos de investigación pensamiento numérico y algebraico e historia de la educación matemática* (pp. 26-49). Salamanca: SEIEM.
- Hernández, J., Muñoz, M.<sup>a</sup>, Palarea, M.<sup>a</sup> M., Ruano, R. y Socas, M. M. (2010b). El conocimiento didáctico como conocimiento teórico, técnico y práctico. Un ejemplo en la formación del profesorado de Matemáticas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 10, (to appear).
- Hernández, J., Noda, A., Palarea, M. M. y Socas, M. M. (2002). Estudio sobre habilidades básicas en Matemáticas de alumnos de Magisterio. El País, jueves 25 de julio de 2002. Sociedad, p. 25.
- Hernández, J., Noda, A., Palarea, M.<sup>a</sup> M. y Socas, M. M. (2003). "Habilidades básicas en Matemáticas de alumnos que inician los estudios de Magisterio" (Preprint). Dto. Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
- Hernández, J., Palarea, M.<sup>a</sup> M. y Socas, M. M. (2001). Análisis de concepciones, creencias y actitudes hacia las Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de Maestro. En M. M. Socas et al. (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III*, 115-125. Campus. La Laguna.
- Krainer, K. and Llinares, S. (2010). Mathematics Teacher Education. En P. Peterson, E. Baker, B. McGaw (Eds), *International Encyclopedia of Education*, vol. 7, pp. 702-705. Amsterdam: Elsevier Science
- Llinares, S. (1991). *La Formación de Profesores de Matemáticas*. GID: Universidad de Sevilla.
- Llinares, S. (1994a). Profesor de matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y desarrollo profesional. En L. Santaló et al., *La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia* (pp. 296-337). Madrid: Rialp.
- Llinares, S. (1994b). The development of prospective elementary teacher's pedagogical knowledge and reasoning. The school mathematical culture as reference. En N. Malara y L. Rico (Eds.), *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education* (pp. 165-172). Italy: Università di Modena.
- Llinares, S. (2004). *La actividad de enseñar matemáticas como organizador de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Adecuación al itinerario educativo del Grado de Matemáticas*. Trabajo presentado en el Itinerario Educativo de la Licenciatura de Matemáticas. Granada.
- Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 51, 92-101.
- Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1990a). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las matemáticas. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pp. 63-116). Sevilla: Alfar.

- Llinares, S. et al. (2000). Didáctica de las Matemáticas y la formación de profesores de secundaria. *Números*, 43-44, 211-214.
- Nickson, M. (1992). The culture of the Mathematics Classroom: An Unknown Quantity?. En Grows, D. A. (Ed). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan.
- Niss, M. (2006). What does it mean to be a competent mathematics teacher? A general problem illustrated by examples from Denmark. En *Praktika, 23º Panellenio Synedrio Mathematikis Paideias*. (pp. 39-47). Patras, Grece: Helleniki Mathematiki Etaireia.
- Palarea, M<sup>a</sup>. M., Hernández, J., y Socas, M. M. (2001). Análisis del nivel de conocimientos de Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de Maestro. En M. M. Socas et al. (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III*, 213-226. Campus. La Laguna.
- Pajares, M. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62 (3), 307-332.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona/HORSORI.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.
- Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona/HORSORI.
- Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
- Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en educación matemática XI*, pp. 19-52.
- Socas, M. M. (2010). Competencia Matemática Formal. Un ejemplo: El Álgebra escolar. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 10, 9-33.
- Socas, M. M., Hernández, J., Palarea, M. M. y Afonso, M. C. (2009). La influencia del pensamiento operacional en el aprendizaje de las Matemáticas y el desarrollo de las competencias matemáticas. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación. Monografía XII*, 101-119.
- Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. En Lester, F. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 157-223. Greenwich, CT: NCTM.